Moderne Quantenfeldtheorie und Einführung in das Standardmodell

(Übungsblatt 1)

Matthias Neubert & Raoul Malm WS 2013/14

Abgabe: 31. Oktober 2013

1. Zwei Ereignisse im Minkowski-Raum (2 Punkte)

Gegeben seien zwei Ereignisse $E_1 : s_1 = (ct_1, \vec{x}_1^T)$ und $E_2 : s_2 = (ct_2, \vec{x}_2^T)$ im Minkowski-Raum mit der Signatur $(+, -, -, -)$. Zeigen Sie:

a) Falls beide Ereignisse einen zeitartigen Abstand besitzen gibt es ein Intertialsystem, in dem beide Ereignisse am selben Ort stattfinden.

b) Falls beide Ereignisse einen raumartigen Abstand besitzen, dann existiert ein Inertialsystem, sodass beide Ereignisse zur selben Zeit stattfinden.

2. Vierer-Impulserhaltung (1 Punkt)

Zeigen Sie, dass bei der Paarvernichtung $e^+e^- \to Photonen$ nie nur <u>ein</u> reelles Photon im Endkanal entstehen kann.

3. Myonen (2 Punkte)

Myonen haben in ihrem Ruhesystem eine Lebensdauer von $\tau_\mu \approx 2 \times 10^{-6} s$. Hochenergetische Myonen werden stetig durch kosmische Strahlung in der Atmosphäre erzeugt, in einer Höhe von etwa $h \approx 30\,\mathrm{km}$. Wie ist es möglich, dass diese Myonen die Erdoberfläche erreichen bevor sie zerfallen (in Elektronen und Neutrinos)? Welche minimale Geschwindigkeit braucht ein Myon, um gerade noch die Erdoberfläche zu erreichen? Erklären Sie in Worten, was dabei physikalisch passiert, einmal aus der Perspektive eines Myons und aus der eines Beobachters auf der Erde.

4. Erzeugung eines Z-Boson Paares (2 Punkte)

Am LEP Speicherring wurden reelle Z-Bosonen mittels $e^+e^- \to ZZ$ erzeugt. Welche Strahlenenergie wird hierfür (im Schwerpunktsystem) benötigt? Welche Strahlenergie bräuchte man bei einem Fixed-Target-Experiment (ein Elektron ruht vor der Kollision), um genügend Energie zur Produktion zu erhalten?

5. Lorentz-invariante Impulsraumintegration (2 Punkte)

Beweisen Sie die Identität

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, 2\pi\, \delta(p^2 - m^2)\, \Theta(p^0) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}}}, \tag{1}$$

wobei $E_{\vec{p}} \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ und $\Theta(p^0)$ die Heaviside-Funktion darstellt.

6. Hamiltonoperator des freien und reellen Klein-Gordon Feldes (4 Punkte)

Betrachten Sie die Lagrangedichte eines freien und rellen skalaren Feldoperators

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - \frac{m^2}{2}\phi^2(x), \tag{2}$$

und berechnen Sie den kanonisch konjugierten Impuls $\pi(x) \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^0\phi)}$. Zeigen Sie, dass der zugehörige Hamiltonian die folgende Form

$$H_0 = E_0 + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}}}\, E_{\vec{p}}\, a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}}\ , \tag{3}$$

besitzt und interpretieren Sie den Term E_0.

Hinweis: Verwenden Sie die Zerlegeung $\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}\,2E_{\vec{p}}}\left(f_{\vec{p}}(x)\, a_{\vec{p}} + f^*_{\vec{p}}(x)\, a^\dagger_{\vec{p}}\right)$ *mit dem Entwicklungskoeffizienten* $f_{\vec{p}}(x) = (2\pi)^{-3/2}\exp(-ip\cdot x)$.

7. Der Feynman Propagator (5 Punkte)

Der Feynman Propagator wird benötigt, um die wechselwirkungsfreie Bewegung eines skalaren Teilchens zu beschreiben. Er ist im Ortsraum definiert über

$$\begin{aligned} i\Delta_F(x-y) &\equiv \langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)\}|0\rangle \\ &= \Theta(x^0-y^0)\,\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle + \Theta(y^0-x^0)\,\langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle, \end{aligned} \tag{4}$$

wobei das Symbol T für das zeitgeordnete Produkt steht.

a) Zeigen Sie zunächst, dass

$$\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}}}\, e^{-ip(x-y)}, \tag{5}$$

um dann im zweiten Schritt auf das Ergebnis

$$i\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}}} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}\left(\Theta(x^0-y^0)e^{-iE_{\vec{p}}(x^0-y^0)} + \Theta(y^0-x^0)e^{-iE_{\vec{p}}(y^0-x^0)}\right), \tag{6}$$

zu gelangen.

b) Führen Sie nun die p_0 Integration des folgenden Ausdrucks

$$i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2-m^2+i\epsilon}, \tag{7}$$

aus, wobei ϵ infinitesimal klein ist mit $\epsilon > 0$ während der Rechnung. Schicken Sie nach der Integration $\epsilon \to 0$, dann sollten Sie den Ausdruck in (6) wiederfinden.