Theoretische Physik 6
Höhere Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie
T. Hurth

9. Übungsblatt

Ausgabe: 18. 12. 2012 Abgabe: Donnerstag, 8. 1. 2012 Besprechung: 17. 1. 2013

Aufgabe 22: $(2+2+2)$

In dieser Aufgabe möchten wir zeigen, dass jede ein- oder zweiwertige Darstellung der $SO(3)$ eine einwertige Darstellung der $SU(2)$ definiert. Sei dazu $\mathbf{U}$ ein Element der Gruppe $SU(2)$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad a,b,c,d \in \mathbb{C}\,. \tag{69}$$

(a) Welche Bedingungen gelten für die vier Matrixelemente a,b,c,d?

Benutzen Sie nun die Parametrisierung

$$a = \cos\theta\, e^{i\xi_a}, \quad b = \sin\theta\, e^{i\xi_b}, \quad c = -\sin\phi\, e^{i\xi_c}, \quad d = \cos\phi\, e^{i\xi_d} \tag{70}$$

mit $0 \le \theta, \phi \le \pi/2$ und $0 \le \xi_{a,b,c,d} < 2\pi$.

(b) Welche Beziehungen gibt es zwischen den einzelnen Parametern? Zeigen Sie, dass man $\mathbf{U}$ schreiben kann als

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \cos\theta\, e^{i\varrho} & \sin\theta\, e^{i\eta} \\ -\sin\theta\, e^{-i\eta} & \cos\theta\, e^{-i\varrho} \end{pmatrix}, \tag{71}$$

wobei $0 \le \theta \le \pi/2$ und $0 \le \eta, \varrho < 2\pi$.

(c) Vergleichen Sie (71) mit der Spinordarstellung der $SO(3)$ (siehe QM1)

$$\mathbf{D}^{(1/2)}(\theta,\psi,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\psi+\phi}{2}} & \sin\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\psi-\phi}{2}} \\ -\sin\frac{\theta}{2}\, e^{-i\frac{\psi-\phi}{2}} & \cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i\frac{\psi+\phi}{2}} \end{pmatrix}. \tag{72}$$

Welche Parameterbereiche gelten nun für die Drehwinkel θ, ψ, ϕ? Vergleichen Sie diese mit den üblichen Bereichen $0 \le \theta \le \pi$ und $0 \le \psi, \phi < 2\pi$ und zeigen Sie, dass die $SU(2)$ eine zweiwertige Darstellung der $SO(3)$ ist.

Aufgabe 23: (10)

Die Vertauschungsrelationen der Erzeugenden von Raum-Zeit-Translationen P^μ mit denen von Drehungen J_i und Lorentz-*boosts* K_i, $i = 1,2,3$ lassen sich leicht herleiten, wenn man sogenannte homogene Koordinaten verwendet. Hierzu definiert man mit Hilfe der 4-dimensionalen Koordinatenvektoren x^μ, $(\mu = 0,1,2,3)$ neue 5-dimensionale Größen $y^{\mathbf{M}} = \{y^4 x^\mu, y^4\}$, $\mathbf{M} = 0,1,\ldots,4$ mit einer beliebigen Konstanten y^4. Die Poincaré-Transformationen

$$x'^{\mu} = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu + a^\mu \tag{73}$$

mit eigentlichen Lorentz-Transformationen $\Lambda^\mu{}_\nu$ und Translationen a^μ lassen sich dann als homogene Transformationen

$$y'^{\mathbf{M}} = \widetilde{\Lambda}^{\mathbf{M}}{}_{\mathbf{N}}\, y^{\mathbf{N}} \tag{74}$$

schreiben, wobei

$$\widetilde{\Lambda}^{\mathbf{M}}{}_{\mathbf{N}} = \begin{cases} \Lambda^{\mu}{}_{\nu} & \text{für } \mathbf{M} = \mu, \quad \mathbf{N} = \nu; \quad \mathbf{M} = \mathbf{N} = 0, \ldots, 3\,; \\ a^{\mu} & \text{für } \mathbf{M} = \mu = 0, \ldots, 3\,, \text{ und } \mathbf{N} = 4\,; \\ 0 & \text{für } \mathbf{N} = \mu = 0, \ldots 3\,, \text{ und } \mathbf{M} = 4\,; \\ 1 & \text{für } \mathbf{M} = \mathbf{N} = 4\,. \end{cases} \tag{75}$$

Geben Sie die Erzeugenden der Poincaré-Transformationen in dieser Darstellung an und berechnen Sie die Kommutatoren der Impulskomponenten mit den Drehimpulskomponenten, $[J_i, P^\mu]$, und mit den Lorentz-*boosts*, $[K_i, P^\mu]$.

Aufgabe 24: (Zusatzaufgabe) (5+5)

(a) Beweisen Sie die Vertauschungsrelationen der Erzeugenden der Poincaré-Gruppe in der kovarianten Formulierung:

$$[M^{\mu\nu}, P^\rho] = -i(P^\mu g^{\nu\rho} - P^\nu g^{\mu\rho})\,; \tag{76}$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i(M^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + M^{\nu\sigma} g^{\mu\rho} - M^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - M^{\nu\rho} g^{\mu\sigma})\,. \tag{77}$$

Der Umfang der notwendigen Rechnungen kann reduziert werden, wenn man zuerst die (Anti-)Symmetrie unter Vertauschungen der Indizes untersucht.

(b) Geben Sie den Zusammenhang der Transformationsparameter $\omega_{\mu\nu}$ in der kovarianten Formulierung für infinitesimale Lorentz-Transformationen $\Lambda = \mathbb{1} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu}$ mit den infinitesimalen Drehwinkeln $\vec{\alpha}$ und Geschwindigkeiten $\vec{\beta}$ an.