Theoretische Physik 6
Höhere Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie
T. Hurth

8. Übungsblatt

Ausgabe: 11. 12. 2012 Abgabe: Donnerstag, 20. 12. 2012 Besprechung: 10. 01. 2013

Aufgabe 19: Drehgruppe $(1 + 1 + 2)$

Betrachten Sie die Drehungen von 3-dimensionalen Koordinatenvektoren $\vec{x} \to \vec{x}' = \boldsymbol{R}\vec{x}$.

(a) Geben Sie die explizite Form der Drehmatrizen $\boldsymbol{R}$ für Drehungen um die Koordinatenachsen mit den Winkeln α_1, α_2, α_3 an.

(b) Geben Sie die explizite Darstellung der Erzeugenden $J_k = i \left.\dfrac{\partial \boldsymbol{R}(\vec{\alpha})}{\partial \alpha_k}\right|_{\alpha_k=0}, k = 1, 2, 3$ als 3×3-Matrizen an.

(c) Leiten Sie die Vertauschungsrelationen $[J_k, J_\ell] = i\epsilon_{k\ell m} J_m$ her.

Aufgabe 20: $(3 + 3)$

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass im Raum der Spinoren
- Drehungen $R(\vec{\alpha})$ um eine Achse $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$ als $U(\vec{\alpha}) = \exp(i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma})$,
- Boosts $L(\vec{v})$ in Richtung $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ als $H(\vec{v}) = \exp(1/2\lambda\vec{\sigma} \cdot \vec{\omega})$, $\vec{\omega} = \vec{v}/|\vec{v}|$, $\lambda = \text{arctanh}|\vec{v}|$

dargestellt werden können. Hierbei sind $\vec{\sigma}$ die bekannten Paulimatrizen.

(a) Zeigen Sie die Gleichheit

$$U(\vec{\alpha}) = \mathbb{1}_{2\times 2} \cos\bigl(|\vec{\alpha}|\bigr) + \frac{i}{|\vec{\alpha}|}\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma} \sin\bigl(|\vec{\alpha}|\bigr) \tag{67}$$

(b) Wie transformiert die Matrix $X = x^\mu \sigma_\mu$, wobei x^μ ein Element des Minkowski-Raumes und $\sigma_\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma})$ ist, unter Boosts in x-, y- und z-Richtung? Was bedeutet das für das Transformationsverhalten der einzelnen Koordinaten x^0, x^1, x^2, x^3?

Aufgabe 21: $(2 + 2 + 1 + 1 + 1)$

Betrachten Sie zwei nicht quantisierte komplexe Skalarfelder ϕ_1 und ϕ_2.

(a) Zeigen Sie, dass die Lagrange-Dichte

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{KG}(\phi_1, \partial_\mu\phi_1) + \mathscr{L}_{KG}(\phi_2, \partial_\mu\phi_2) \tag{68}$$

invariant unter $SU(2)$-Transformationen $U \in SU(2)$ mit $\phi_i \to \phi_i' = \sum_j U_{ij}\phi_j$ ist (siehe Aufgabe 14). $\mathscr{L}_{KG}$ bezeichnet die bekannte Lagrange-Dichte für ein wechselwirkungsfreies komplexes Klein-Gordon-Feld mit Masse m.

In der quantisierten Version dieses Modells transformieren sich die Feldoperatoren $\Phi = \binom{\Phi_1}{\Phi_2}$ nach der Vorschrift

$$\Phi \to \Phi' = U\Phi U^\dagger, \tag{69}$$

wobei U jetzt ein unitärer Operator auf dem Hilbert-Raum der Zustände ist. Den Feldoperatoren Φ_1 und Φ_2 seien Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a_i^\dagger, a_i$ und $b_i^\dagger, b_i$ $(i = 1, 2)$ zugeordnet. Der Vakuumzustand soll invariant unter den Transformationen U sein: $U|0\rangle = |0\rangle$.

(b) Nach welcher Vorschrift transformieren sich die durch $a_i^\dagger$ und $b_i^\dagger$ erzeugten 1-Teilchenzustände?

(c) Wäre die Lagrange-Dichte auch dann $SU(2)$-invariant, wenn man zwei skalare Teilchen mit verschiedenen Massen kombiniert hätte?

(d) Unter welchen Transformationen wäre ein System von zwei *reellen* Skalarfeldern invariant?

(e) Welche Rolle spielt in all diesen Fällen die Forderung, dass die Determinante der jeweiligen Transformationen gleich 1 sein soll?