Theoretische Physik 6
Höhere Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie
T. Hurth

7. Übungsblatt

Ausgabe: 04. 12. 2012 Abgabe: Donnerstag, 13. 12. 2012 Besprechung: 20. 12. 2012

Aufgabe 17: Die Green'schen Funktionen der Klein-Gordon-Gleichung (8+4+2)

Es gibt einige häufig in der Literatur verwendete *Green'sche Funktionen* $G(x) = G(\vec{x}, t)$ der Klein-Gordon-Gleichung. Sie erfüllen die inhomogene Gleichung

$$(\Box + m^2)\, G(x) = \delta(x)\,. \tag{58}$$

Um die Lösung G eindeutig zu bestimmen, benötigt man zusätzlich noch die Anfangswerte für $G(x)$ und $\partial_0 G(x)$ zur Zeit $t = 0$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Fouriertransformierten von $G(x)$ und $\delta(x)$, dass die Lösung von (58) im Allgemeinen die Form

$$G(x) = -\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\exp\bigl(-ik \cdot x\bigr)}{k^2 - m^2} \tag{59}$$

hat, wobei die Integration über den ganzen $\vec{k}$-Raum und über einen beliebigen Integrationsweg von $k_0 = -\infty$ bis $k_0 = +\infty$ in der komplexen k_0-Ebene, allerdings unter Umgehung der Pole $k_0 = \pm\omega_k = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ erfolgt. Um die k_0-Integration auszuführen, muss man diese abspalten. Schreiben Sie daher (59) auf folgenden Ausdruck für $G(x)$ um:

$$G(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^4} e^{i\vec{k}\vec{x}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_0 \frac{-\exp\left(-ik_0 t\right)}{(k_0 - \omega_k)(k_0 + \omega_k)} \tag{60}$$

Bevor Sie weiterrechnen, ein paar Anmerkungen: Unterschiedliche Integrationswege entsprechen nun unterschiedlichen Green'schen Funktionen. Man erhält

- die *retardierte* Green'sche Funktion $G_{\mathrm{R}}(x)$, wenn der Integrationsweg in der k_0-Ebene *oberhalb* der beiden Pole $k_0 = \pm\omega_k$ verläuft;
- die *avancierte* Green'sche Funktion $G_{\mathrm{A}}(x)$, wenn der Integrationsweg *unterhalb* der beiden Pole verläuft;
- die *kausale* oder *Feynman'sche* Green'sche Funktion G_{F}, wenn der Integrationsweg *unterhalb* des Pols $k_0 = -\omega_k$ und *oberhalb* des Pols $k_0 = +\omega_k$ verläuft.

Außerdem kann man noch Green'sche Funktionen der Form (59) einführen, bei denen der Integrationsweg nicht von $k_0 = -\infty$ bis $k_0 = +\infty$ verläuft:

- Der *Positiv-Frequenz-Anteil* $G^{(+)}(x)$ und der *Negativ-Frequenz-Anteil* $G^{(-)}(x)$, wobei gegen den Uhrzeigersinn um den Pol $k_0 = +\omega_k$ bzw. $k_0 = -\omega_k$ herum integriert wird.
- Die *Pauli-Jordan-Funktion* $\widetilde{G}(x)$, bei der der Integrationsweg gegen den Uhrzeigersinn um beide Pole herum verläuft.

Führen Sie nun die k_0-Integration, nicht aber die $\vec{k}$-Integration, für die oben genannten Fälle explizit aus.
Hinweis: Verschieben Sie die Polstellen um $\pm i\varepsilon$ (ε infinitesimal) in die komplexe Ebene. Schreiben Sie das obige Integral geeignet um in ein Integral über einen geschlossen Weg und verwenden Sie dann den Residuensatz.

(b) Leiten Sie anhand der Ergebnisse aus Teil (a) folgende Relationen her:

$$\begin{gathered}\widetilde{G} = G_\mathrm{A} - G_\mathrm{R}\,, \qquad G_\mathrm{R} = -\theta(t)\widetilde{G}\,, \qquad G_\mathrm{A} = \theta(-t)\widetilde{G}\,, \qquad \widetilde{G} = G^{(+)} + G^{(-)}\,, \\ G_\mathrm{F} = G_\mathrm{R} + G^{(-)} = G_\mathrm{A} - G^{(+)} = -\theta(t)G^{(+)} + \theta(-t)G^{(-)}\,. \end{gathered} \tag{61}$$

Zeigen Sie außerdem, dass

$$(\Box + m^2)\,\widetilde{G}(x) = (\Box + m^2)\,G^{(+)}(x) = (\Box + m^2)\,G^{(-)}(x) = 0 \tag{62}$$

gilt.

(c) Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen den Green'schen Funktionen $G^{(+)}$, $G^{(-)}$, G_F und $\widetilde{G}$ und der in der Vorlesung eingeführten kausalen Distribution $\Delta_0(x)$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den hier betrachteten Green'schen Funktionen und dem Propagator $D_\mathrm{F}(x)$ (siehe später in der Vorlesung)

$$D_\mathrm{F}(x) = -i\int \tfrac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{\exp\{-ikx\}}{k_0^2 - \omega_{\vec{k}}^2 + i\varepsilon}\,, \qquad \varepsilon \text{ infinitesimal} \quad ? \tag{63}$$

Aufgabe 18: $(3+3)$
Die Lösungen der komplexen Klein-Gordon-Gleichung lauten

$$\Phi(x) = \int \frac{d^3p}{2E_p}\left\{f_p(x)\,a(p) + f_p^*(x)\,b^\dagger(p)\right\} \text{ und } \Phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{2E_p}\left\{f_p^*(x)\,a^\dagger(p) + f_p(x)\,b(p)\right\}, \tag{64}$$

wobei die Energie durch $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ und die Entwicklungskoeffizienten durch $f_{\vec{p}}(x) = (2\pi)^{-3/2}\exp\big(-ip\cdot x\big)$ gegeben sind. Ziel dieser Aufgabe ist es, $a(p)$ und $a^\dagger(p)$ ($b(p)$ und $b^\dagger(p)$) als die Auf- und Absteigeoperatoren von Teilchen (Antiteilchen) zu identifizieren.

(a) Dazu berechnen Sie mithilfe des erhaltenen Stroms J^μ aus Aufgabe 11 d) die erhaltene Ladung Q

$$:Q: = \int \frac{d^3p}{2E_p}\left[a^\dagger(p)\,a(p) - b^\dagger(p)b(p)\right] \tag{65}$$

Wie kann man nun zeigen, dass $a^{(\dagger)}(p)$ und $b^{(\dagger)}(p)$ Teilchen mit entgegengesetzten Ladungen zuzuordnen sind?

(b) Bonusaufgabe: Leiten Sie die analoge Gleichung für H (siehe Aufgabe 12 c)) her:

$$:H: = \int \frac{d^3p}{2E_p}E_p\left[a^\dagger(p)\,a(p) + b^\dagger(p)b(p)\right] \tag{66}$$

Interpretieren Sie das Ergebnis.