Theoretische Physik 6
Höhere Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie
T. Hurth

6. Übungsblatt

Ausgabe: 27. 11. 2012 Abgabe: Donnerstag, 6. 12. 2012 Besprechung: 13. 12. 2012

Aufgabe 14: $(2 + 3)$

Betrachten Sie die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ von nicht-wechselwirkenden komplexen Skalarfeldern $\phi_i(x)$, $(i = 1, 2)$

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi_i^* \partial^\mu \phi_i - m^2 \phi_i^* \phi_i \,, \tag{49}$$

wobei hier und im Folgenden die Einstein'sche Summenkonvention verwendet wird.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}$ invariant unter globalen $SU(2)$ Transformationen

$$\delta\phi_i(x) = -i\alpha^a \, T^a_{ij} \, \phi_j(x) \,, \qquad [T^a, T^b] = i\epsilon^{abc} T^c \,, \quad \alpha^a \in \mathbb{R} \,, \quad a = 1, 2, 3 \tag{50}$$

ist. Nutzen Sie dabei aus, dass die Generatoren T^a hermitesch sind.

(b) Berechnen Sie nun die Bewegungsgleichungen und den zugehörigen Noetherstrom.

Aufgabe 15: $(2 + 2)$

Die Entwicklung des Feldoperators für das (reelle) Klein-Gordon-Feld nach ebenen Wellen lautet

$$\Phi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{2E_p} \big(f_{\vec{p}}(x) \, a(\vec{p}) + f^*_{\vec{p}}(x) \, a^\dagger(\vec{p}) \big) \,, \tag{51}$$

wobei die Energie durch $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ und die Entwicklungskoeffizienten durch $f_{\vec{p}}(x) = (2\pi)^{-3/2} \exp\big(-ip \cdot x\big)$ gegeben sind.

(a) Zeigen Sie, dass die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren mit Hilfe folgender Formeln berechnet werden können:

$$\begin{aligned} a(\vec{p}) &= i \int \mathrm{d}^3 x \; f^*_{\vec{p}}(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \Phi(x) \,, \\ a^\dagger(\vec{p}) &= -i \int \mathrm{d}^3 x \; f_{\vec{p}}(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \Phi(x) \,. \end{aligned} \tag{52}$$

(b) Überprüfen Sie, dass $a(\vec{p})$ und $a^\dagger(\vec{p})$ zeitunabhängig sind, indem Sie die zeitliche Ableitung von $a(\vec{p})$ und $a^\dagger(\vec{p})$ berechnen.

Aufgabe 16: (3+2)

Die Vertauschungsrelationen für das reelle Klein-Gordon-Feld lauten (siehe Vorlesung)

$$\begin{aligned}
&[\hat{\Phi}(\vec{x},t),\hat{\Pi}(\vec{x}\,',t)] = i\delta(\vec{x}-\vec{x}\,')\,,\\
&[\hat{\Phi}(\vec{x},t),\hat{\Phi}(\vec{x}\,',t)] = [\hat{\Pi}(\vec{x},t),\hat{\Pi}(\vec{x}\,',t)] = 0\,,
\end{aligned} \tag{53}$$

wobei $\hat{\Pi} = \partial\mathcal{L}/\partial(\partial_0\Phi)$. Diese Vertauschungsrelationen sind nur für $t = t'$ postuliert. Die entsprechenden Relationen zu verschiedenen Zeiten folgen aus der zeitlichen Entwicklung des Systems, die durch den Hamiltonian $\hat{H}$ beschrieben wird. Dieser wurde in Aufgabe 12 (Gleichung (47)) definiert und bereits berechnet.

(a) Zeigen Sie, dass $\hat{\Phi}(x)$ und $\hat{\Pi}(x)$ die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen, d.h.

$$[\hat{H},\hat{\Phi}(x)] = -i\partial^0\hat{\Phi}(x)\,, \qquad [\hat{H},\hat{\Pi}(x)] = -i\partial^0\hat{\Pi}(x)\,, \tag{54}$$

erfüllen. Zeigen Sie außerdem (ebenfalls mithilfe der Definition aus Aufgabe 12), dass

$$\left[\hat{\vec{P}},\hat{\Phi}(x)\right] = i\vec{\nabla}\,\hat{\Phi}(x)\,. \tag{55}$$

(b) Die Gleichungen (54) und (55) kann man zusammenfassen zu

$$[\hat{P}^\nu,\hat{\Phi}(x)] = -i\partial^\nu\hat{\Phi}(x)\,. \tag{56}$$

Zeigen Sie, dass für ein beliebiges Polynom $\hat{F} = F(\hat{\Phi})$ die analoge Gleichung gilt:

$$[\hat{P}^\nu,\hat{F}(x)] = -i\partial^\nu\hat{F}(x)\,. \tag{57}$$

Notieren Sie bitte die Zeit, die Sie für die Bearbeitung der Aufgaben benötigt haben.