

**Theoretische Physik 6**  
**Höhere Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie**

T. Hurth

**5. Übungsblatt**

Ausgabe: 20. 11. 2012

Abgabe: Donnerstag, 29. 11. 2012

Besprechung: 6. 12. 2012

---

**Aufgabe 11:** (2 + 3 + 3 + 2)

In der nicht-relativistischen Quantenmechanik beruht die Interpretation der Wellenfunktion  $\psi(\vec{x}, t)$  als Wahrscheinlichkeitsamplitude auf der Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (43)$$

für die Wahrscheinlichkeitsdichte  $\rho$  und die Stromdichte  $\vec{j}$ , gegeben durch

$$\rho = |\psi|^2 \quad \text{und} \quad \vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* (\vec{\nabla} \psi) - (\vec{\nabla} \psi^*) \psi). \quad (44)$$

(a) Leiten Sie diese Kontinuitätsgleichung mit Hilfe der (freien) Schrödingergleichung für ein nicht-relativistisches freies Teilchen der Masse  $m$  her.

*Hinweis:* Multiplizieren Sie die Schrödingergleichung von links mit  $\psi^*$  und subtrahieren Sie das komplex Konjugierte der gesamten Gleichung.

(b) Was ändert sich in der Definition von  $\vec{j}$  und in der Herleitung der Kontinuitätsgleichung, wenn das Teilchen mit einem äußeren elektromagnetischen Feld wechselwirkt?

*Hinweis:* Verwenden Sie die minimale Substitution  $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}$  und den Hinweis zu Aufgabenteil (a).

(c) Analysieren Sie die Frage, ob auch das (komplexe) Feld  $\phi(\vec{x}, t)$  in der Klein-Gordon-Gleichung  $(\square + m^2)\phi = 0$  eine analoge Interpretation erlaubt (Schein-Problem 1 aus der Vorlesung). Warum kann das entsprechende  $\rho$  in diesem Fall nicht als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden? Was ist die physikalische Erklärung?

(d) Leiten Sie nochmals die Kontinuitätsgleichung für das komplexe Klein-Gordon-Feld her, diesmal jedoch mit Hilfe des Noether-Theorems. Untersuchen Sie dafür zunächst die Invarianz des Klein-Gordon-Feldes, deren Lagrangedichte gegeben ist durch (siehe Vorlesung)

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi, \quad (45)$$

unter einer globalen  $U(1)$  Transformation  $\phi \rightarrow e^{-i\Lambda} \phi$ , mit  $\Lambda \in \mathbb{R}$ . Wenden Sie dann das Noether-Theorem an.

**Aufgabe 12:** (3 + 1 + 3)

Der Energie-Impuls-Tensor eines klassischen Feldes  $\phi(x)$  mit der Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$  lautet

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}. \quad (46)$$

(a) Berechnen Sie die Energie und den Impuls des reellen Klein-Gordon-Feldes (siehe Vorlesung)

$$H = P^0 = \int d^3x T^{00}, \quad P^i = \int d^3x T^{0i} \quad (47)$$

in Abhängigkeit des Feldes und seiner Ableitungen. Zeigen Sie, dass  $H$  positiv definit ist und es somit kein negatives Energieproblem (Schein-Problem 2 aus der Vorlesung) in der Feldtheorie der Klein-Gordon-Gleichung gibt.

(b) Was ändert sich, wenn der Lagrangedichte ein Term  $-\lambda\phi^4$  (skalares (Spin-0) Teilchen mit Selbstwechselwirkung) hinzugefügt wird?

(c) Führen Sie dieselbe Rechnung für das komplexe Klein-Gordon-Feld durch. Wie ändert sich  $T^{\mu\nu}$ ?

**Aufgabe 13:** (2 + 2)

Ein massives (reelles) 4-Vektorfeld  $\phi_\mu(x)$ , das mit einer äußeren 4-Stromdichte  $J_\mu(x)$  wechselwirkt, besitzt folgende Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu\phi_\nu - \partial_\nu\phi_\mu)(\partial^\mu\phi^\nu - \partial^\nu\phi^\mu) + \frac{1}{2}\mu^2\phi_\mu\phi^\mu + J_\mu\phi^\mu. \quad (48)$$

(a) Leiten Sie die Feldgleichungen her (*Proca-Gleichung*, von Alexandre Proca (1897-1955) im Jahr 1934 vorgeschlagene Gleichung für die Beschreibung von massiven Teilchen mit Spin 1, sogenannten Vektormesonen).

(b) Zeigen Sie, dass (im Gegensatz zum elektromagnetischen Feld  $A_\mu$ ) die Feldgleichungen nicht die Kontinuitätsgleichung für  $J_\mu$  zur Folge haben, d.h. es gilt nicht  $\partial_\mu J^\mu = 0$ . Welche Bedingung muss das Feld  $\phi_\mu$  erfüllen, damit die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist?

Notieren Sie bitte die Zeit, die Sie für die Bearbeitung der Aufgaben benötigt haben.