Theoretische Physik 6
Höhere Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie
T. Hurth

4. Übungsblatt

Ausgabe: 13. 11. 2012 Abgabe: Donnerstag, 22. 11. 2012 Besprechung: 29. 11. 2012

Aufgabe 9: $(3+3+2+2)$

Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für ein diskretes Spektrum von bosonischen 1-Teilchenzuständen (in einem unendlich-dimensionalen Hilbertraum) seien $b_k^\dagger$ und b_k . Die N-Teilchen-Basiszustände

$$|\underline{n}\rangle \equiv |\ldots n_k \ldots\rangle = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n_k!}} (b_k^\dagger)^{n_k} |0\rangle \tag{32}$$

sind durch die Besetzungszahlen n_k definiert. Für die folgenden Rechnungen kann es nützlich sein, einen Spezialfall der sogenannten Baker-Hausdorff-Formel zu verwenden:

$$e^A \, e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]} \,. \tag{33}$$

Diese Formel ist gültig, falls $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe von (33) und der Reihendarstellung der Exponentialfunktion, dass der Zustand

$$|\phi\rangle = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k b_k^\dagger\right) |0\rangle, \quad \phi_k \in \mathbb{C}\,, \tag{34}$$

als Linearkombination der (symmetrisierten) N-Teilchenzustände geschrieben werden kann:

$$|\phi\rangle = \sum_{\underline{n}} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n_k!}} \phi_k^{n_k} |\underline{n}\rangle \,. \tag{35}$$

(b) Zeigen Sie, dass $|\phi\rangle$ ein Eigenzustand aller Vernichtungsoperatoren ist: $b_k|\phi\rangle = \phi_k|\phi\rangle$. Zustände mit dieser Eigenschaft heißen *kohärente Zustände*.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von (35) aus Teilaufgabe (a), dass kohärente Zustände $|\phi\rangle$ und $|\phi'\rangle$ zu verschiedenen ϕ_k, $\phi'_k \in \mathbb{C}$ nicht orthogonal sind, sondern die folgende Gleichung erfüllen:

$$\langle\phi|\phi'\rangle = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k^* \phi'_k\right) \,. \tag{36}$$

(d) Berechnen Sie die Erwartungswerte der Besetzungszahloperatoren $N_k = b_k^\dagger b_k$ und des Teilchenoperators $N = \sum_{k=1}^{\infty} N_k$ in kohärenten Zuständen:

$$\frac{\langle\phi|N_k|\phi\rangle}{\langle\phi|\phi\rangle} = |\phi_k|^2, \quad \frac{\langle\phi|N|\phi\rangle}{\langle\phi|\phi\rangle} = \sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2 \,. \tag{37}$$

Anmerkung: Für die Theorie der kohärenten Zustände und Anwendungen in der Quantenoptik erhielt Roy J. Glauber 2005 den Nobelpreis.

Roy J. Glauber, *Coherent and Incoherent States of the Radiation Field*, Phys. Rev. 131, 2766–2788 (1963). `http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.131.2766`

Aufgabe 10: $(4+2+4)$

In dieser Aufgabe sollen die Beiträge zum Hamilton-Operator eines in einem endlichen Volumen V eingeschlossenen Gases von N Elektronen in der Besetzungszahldarstellung untersucht werden. Als Basiszustände können die auf das Volumen V normierten ebenen Wellen $|\psi_{\vec{k}}\rangle$ $(\equiv |\vec{k}\rangle)$ mit

$$\langle \vec{x}|\psi_{\vec{k}}\rangle = \psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x}) \tag{38}$$

zu quantisierten Impulsen ($\hbar k_i = 2\pi\hbar n_i/V^{1/3}$, $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1,2,3$) verwendet werden. Die zugehörigen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren seien mit $a^\dagger_{\vec{k}}$ und $a_{\vec{k}}$ bezeichnet. Der Spinfreiheitsgrad wird nicht berücksichtigt.

(a) Zeigen Sie, dass die kinetische Energie des Elektronengases (in der Ortsdarstellung: $H_0 = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\vec{x}_i}$) in der Form

$$H_0 = \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar^2}{2m}\vec{k}^2 a^\dagger_{\vec{k}} a_{\vec{k}} \tag{39}$$

geschrieben werden kann.

Hinweis: Drücken Sie die (antisymmetrisierten) Zustände $|\underline{n}_{\vec{k}}\rangle$ durch die ebenen Wellen und die Ortsraum-Basiszustände $|\underline{\vec{x}}\rangle$ aus. Berechnen Sie dann die Matrixelemente $\langle \underline{m}_{\vec{k}}|\, H_0\, |\underline{n}_{\vec{k}}\rangle$ mit den beiden obigen Definitionen von H_0 und zeigen Sie, dass beide Rechnungen auf dasselbe Ergebnis führen.

(b) Zeigen Sie analog zu (a), dass die Wechselwirkung mit einem ortsunabhängigen äußeren Potenzial $u_0 = const.$ durch

$$H_\mathrm{e} = \sum_{\vec{k}} u_0\, a^\dagger_{\vec{k}} a_{\vec{k}} \tag{40}$$

gegeben ist (*homogenes* Elektronengas).

(c) **Bonusaufgabe**: Die nur vom Abstand $|\vec{x}_i - \vec{x}_j|$ abhängige Wechselwirkung der Elektronen untereinander sei in der Ortsdarstellung durch

$$H_\mathrm{WW} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} V(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) \tag{41}$$

gegeben. Leiten Sie die folgende in der Besetzungszahldarstellung gültige Form her:

$$H_\mathrm{WW} = \frac{1}{2V}\sum_{\vec{k},\vec{k}'}\sum_{\vec{q}} v_{\vec{q}}\, a^\dagger_{\vec{k}+\vec{q}}\, a^\dagger_{\vec{k}'-\vec{q}}\, a_{\vec{k}'} a_{\vec{k}}\,, \quad \text{mit} \quad v_{\vec{q}} = \int d^3x \exp(-i\vec{q}\cdot\vec{x})\, V(|\vec{x}|)\,. \tag{42}$$

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 6b. Wie kann man also $v_{\vec{q}}$ berechnen?

Notieren Sie bitte die Zeit, die Sie für die Bearbeitung der Aufgaben benötigt haben.