Theoretische Physik 6
Höhere Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie
T. Hurth

3. Übungsblatt

Ausgabe: 6. 11. 2012 Abgabe: Donnerstag, 15. 11. 2012 Besprechung: 22. 11. 2012

Aufgabe 6b: (12)

Zeigen Sie, dass der Wechselwirkungsanteil des Hamiltonoperators H_{WW} für ein System von N Fermionen mit Paarwechselwirkung

$$H_{WW} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1,\, i\neq j}^{N} V(x_i, x_j) \tag{20}$$

in der Besetzungszahldarstellung die Form

$$H_{WW} = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=0}^{\infty} a_i^\dagger a_j^\dagger a_k a_l \, \langle i, j|V|l, k\rangle \tag{21}$$

annimmt, wobei

$$\langle i, j|V|l, k\rangle = \int d^3x \int d^3x' \, \psi_i^*(x)\psi_j^*(x')V(x, x')\psi_l(x)\psi_k(x') \, . \tag{22}$$

Beachten Sie die Reihenfolge der Indizes in Gleichung (21). Die $\psi_k(x)$ bilden einen vollständigen Satz von orthonormierten Wellenfunktionen für die 1-Teilchenzustände $|k\rangle$. Als Basis für den N-Teilchen-Hilbertraum der Fermionen können dann die antisymmetrisierten Zustände

$$|\underline{c}\rangle = \sum_P \sigma\,(P)\,|c_{P_1} \ldots c_{P_N}\rangle \tag{23}$$

gewählt werden, wobei $\underline{c} = (c_1, \ldots, c_N)$ und $(P_1, \ldots, P_N)$ eine Permutation der Teilchenindizes $(1, \ldots, N)$ ist.

Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

In der Ortsdarstellung (20) findet man für die Matrixelemente in den Zuständen (23) folgendes Ergebnis:

Fall a) die Indizes in $\underline{b}$ (definiert analog zu $\underline{c}$) und $\underline{c}$ stimmen alle überein, d.h. $\underline{b} = \underline{c}$:

$$\langle\underline{b}|H_{WW}|\underline{c}\rangle = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \left(\langle b_i b_j|V|b_i b_j\rangle - \langle b_i b_j|V|b_j b_i\rangle\right) ; \tag{24}$$

Fall b) die Indizes in $\underline{b}$ und $\underline{c}$ stimmen bis auf ein Paar überein, d.h. es gibt ein $b_k \in \underline{b}$ und ein $c_l \in \underline{c}$ mit $b_k \neq c_l$ und $b_j = c_j$ für $j \neq k, l$:

$$\langle\underline{b}|H_{WW}|\underline{c}\rangle = \sum_{i=1}^{N} \left(\langle b_i b_k|V|b_i c_l\rangle - \langle b_i b_k|V|c_l b_i\rangle\right) ; \tag{25}$$

Fall c) die Indizes in $\underline{b}$ und $\underline{c}$ stimmen bis auf zwei Paare überein, d.h. es gibt ein Paar $(b_k, b_{k'}) \in \underline{b}$ und $(c_l, c_{l'}) \in \underline{c}$ mit $(b_k, b_{k'}) \neq (c_l, c_{l'})$ und $b_j = c_j$ für $j \neq k, k', l, l'$:

$$\langle \underline{b} | H_{WW} | \underline{c} \rangle = \langle b_k b_{k'} | V | c_l c_{l'} \rangle - \langle b_k b_{k'} | V | c_{l'} c_l \rangle \, . \tag{26}$$

Führen Sie nun die Berechnung der Matrixelemente $\langle \underline{b} | H_{WW} | \underline{c} \rangle$ in der Besetzungszahldarstellung, Gl. (21), aus und zeigen Sie, dass die Gleichungen (24) - (26) ebenfalls gelten.

Hinweis: Die drei Fälle lassen sich auch mit Hilfe der Teilchenzahloperatoren N_k (siehe Aufgabe 5) charakterisieren. Zum Beispiel kann man im Fall b) schreiben:

$$\begin{aligned} N_{b_k} |\underline{b}\rangle &= 1 |\underline{b}\rangle \, , \qquad & N_{b_k} |\underline{c}\rangle &= 0 |\underline{c}\rangle \, ; \\ N_{c_l} |\underline{b}\rangle &= 0 |\underline{b}\rangle \, , \qquad & N_{c_l} |\underline{c}\rangle &= 1 |\underline{c}\rangle \, . \end{aligned}$$

Wie kann man den Zustand $|\underline{b}\rangle$ aus $|\underline{c}\rangle$ erhalten, wenn man die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren verwendet?

Aufgabe 7: (6)

Die Wirkung der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren auf bosonische Zustände in der Besetzungszahldarstellung ist durch

$$\begin{aligned} b_k^\dagger | \ldots n_k \ldots \rangle &= \sqrt{n_k + 1} | \ldots n_k + 1 \ldots \rangle \, , \\ b_k | \ldots n_k \ldots \rangle &= \sqrt{n_k} | \ldots n_k - 1 \ldots \rangle \end{aligned} \tag{27}$$

gegeben. Berechnen Sie folgende Kommutatoren:

$$\text{(a)} \quad [b_k, b_l^\dagger] \qquad \text{(b)} \quad [N_k, b_l] \, , \qquad \text{(c)} \quad [N_k, b_l^\dagger] \, , \qquad \text{(d)} \quad [N, b_l] \, , \qquad \text{(e)} \quad [N, b_l^\dagger] \tag{28}$$

mit

$$N_k = b_k^\dagger b_k \, , \quad N = \sum_{k=0}^{\infty} N_k \, . \tag{29}$$

(f) Berechnen Sie die Kommutatoren (nicht Antikommutatoren!) aus Aufgaben (b) - (e) nochmals für fermionische Operatoren. Verwenden Sie dazu die bekannten Antivertauschungsregeln für fermionische Erzeuger und Vernichter.

Aufgabe 8: (4)

Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator für ein fermionisches N-Teilchensystem mit 2-Teilchenwechselwirkung (siehe Vorlesung und Aufgabe 6)

$$H = \sum_{k,l=0}^{\infty} h_{kl}^0 a_k^\dagger a_l + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=0}^{\infty} v_{ijkl} a_i^\dagger a_j^\dagger a_l a_k \tag{30}$$

mit dem Teilchenzahloperator

$$N = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^\dagger a_m \tag{31}$$

vertauscht. Was heißt das physikalisch?
Hinweis: Sie können das Ergebnis von Aufgabe 7(f) verwenden.

Notieren Sie bitte die Zeit, die Sie für die Bearbeitung der Aufgaben benötigt haben.