Theoretische Physik 6
Höhere Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie
T. Hurth

2. Übungsblatt

Ausgabe: 30. 10. 2012 Abgabe: Donnerstag, 8. 11. 2012 Besprechung: 15. 11. 2012

Aufgabe 4: (2)

Zeigen Sie, dass in einem beliebigen Zustand $|\psi\rangle$ von N Fermionen für den Erwartungswert der Besetzungszahlen $n_k = \langle\psi|a_k^\dagger a_k|\psi\rangle$ die Ungleichungen $0 \leq n_k \leq 1$ gelten.

Hinweis: Ein beliebiger Zustand kann als Linearkombination von antisymmetrisierten und normierten Basiszuständen $|\underline{c}\rangle$ ($\underline{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_N)$) geschrieben werden. Gehen Sie in die Besetzungszahldarstellung.

Aufgabe 5: (2)

Leiten Sie aus den Antivertauschungsregeln für $a_k, a_k^\dagger$ (Vernichter bzw. Erzeuger für Fermionen)

$$\{a_k, a_{k'}\} = 0, \quad \{a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger\} = 0, \quad \{a_k, a_{k'}^\dagger\} = \delta_{k,k'} \tag{11}$$

die Eigenschaft

$$N_k(N_k - 1) = 0 \tag{12}$$

für den Teilchenzahloperator $N_k = a_k^\dagger a_k$ her. Interpretieren Sie (12).

Aufgabe 6a (Bonusaufgabe): (6)

Ergänzen Sie die in der Vorlesung begonnene Rechnung, mit der gezeigt werden soll, dass der freie Anteil der Hamiltonoperators H_0 für ein System von N Fermionen

$$H_0 = \sum_{i=1}^{N} H_{0,i} \tag{13}$$

in der Besetzungszahldarstellung die Form

$$H_0 = \sum_{k,l=0}^{\infty} a_k^\dagger a_l \, \langle k|H_{0,i}|l\rangle \tag{14}$$

annimmt, wobei

$$\langle k|H_{0,i}|l\rangle = \int d^3x \, \psi_k^*(x) H_{0,i}(x) \psi_l(x) \; . \tag{15}$$

Die $\psi_k(x)$ bilden einen vollständigen Satz von orthonormierten Wellenfunktionen für die 1-Teilchenzustände $|k\rangle$. Als Basis für den N-Teilchen-Hilbertraum der Fermionen können dann die antisymmetrisierten Zustände

$$|\underline{c}\rangle = \sum_P \sigma\,(P)\,|c_{P_1} \dots c_{P_N}\rangle \tag{16}$$

gewählt werden, wobei $\underline{c} = (c_1, \dots, c_N)$ und $(P_1, \dots, P_N)$ eine Permutation der Teilchenindizes $(1, \dots, N)$ ist.

Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

In der Ortsdarstellung (13) findet man für die Matrixelemente in den Zuständen (16) folgendes Ergebnis:

Fall a) die Indizes in $\underline{b}$ (definiert analog zu $\underline{c}$) und $\underline{c}$ stimmen alle überein, d.h. $\underline{b} = \underline{c}$:

$$\langle \underline{b}|H_0|\underline{c}\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle c_i|H_{0,i}|c_i\rangle\,; \tag{17}$$

Fall b) die Indizes in $\underline{b}$ und $\underline{c}$ stimmen bis auf ein Paar überein, d.h. es gibt ein $b_k \in \underline{b}$ und ein $c_l \in \underline{c}$ mit $b_k \neq c_l$ und $b_j = c_j$ für $j \neq k, l$:

$$\langle \underline{b}|H_0|\underline{c}\rangle = \sigma\,(P_0)\langle b_k|H_{0,i}|c_l\rangle, \tag{18}$$

wobei P_0 die Permutation mit $P_{0,k} = l$ ist.

Führen Sie nun die Berechnung der Matrixelemente $\langle \underline{b}|H_0|\underline{c}\rangle$ in der Besetzungszahldarstellung, Gl. (14), aus und zeigen Sie, dass die Gleichungen (17) und (18) ebenfalls gelten.

Hinweis: Die zwei Fälle lassen sich auch mit Hilfe der Teilchenzahloperatoren N_k (siehe Aufgabe 5) charakterisieren. Zum Beispiel kann man im Fall b) schreiben:

$$\begin{aligned} N_{b_k}|\underline{b}\rangle &= 1|\underline{b}\rangle\,, \qquad & N_{b_k}|\underline{c}\rangle &= 0|\underline{c}\rangle\,; \\ N_{c_l}|\underline{b}\rangle &= 0|\underline{b}\rangle\,, \qquad & N_{c_l}|\underline{c}\rangle &= 1|\underline{c}\rangle\,. \end{aligned}$$

Wie kann man den Zustand $|\underline{b}\rangle$ aus $|\underline{c}\rangle$ erhalten, wenn man die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren verwendet?

Notieren Sie bitte die Zeit, die Sie für die Bearbeitung der Aufgaben benötigt haben.