

Theoretische Physik 6
Höhere Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie
T. Hurth

1. Übungsblatt (Teil 2)

Ausgabe: 23. 10. 2012

Abgabe: Freitag, 2. 11. 2012

Besprechung: 8. 11. 2012

Aufgabe 2: (3 + 3)

Gegeben sei ein vollständiger Satz von orthonormierten 1-Teilchenwellenfunktionen $\psi_j(x)$, d.h. es gilt

$$\int dx \psi_j^*(x) \psi_k(x) = \delta_{jk}, \quad (1)$$

$$\sum_j \psi_j^*(x) \psi_j(y) = \delta(x - y). \quad (2)$$

Zeigen Sie, dass die antisymmetrisierten N -Teilchenwellenfunktionen $\psi_{c_1, \dots, c_N}(x_1, \dots, x_N)$ orthonormiert und vollständig sind.

(*Hinweis:* Zeigen Sie für den Beweis der Vollständigkeit, dass jede vollständig antisymmetrisierte Funktion $f(x_1, \dots, x_N)$ als Linearkombination der ψ_{c_1, \dots, c_N} geschrieben werden kann.)

Aufgabe 3 (Bonusaufgabe): (2 + 1 + 3 + 3)

Betrachten Sie ein System von zwei Spin-1/2-Teilchen mit den Spin-Operatoren $\vec{S}^{(1)}$, $\vec{S}^{(2)}$. Die $\vec{S}^{(i)}$ wirken auf die 1-Teilchen-Basiszustände des Teilchens i , die Eigenzustände zu $(\vec{S}^{(i)})^2$ und $\vec{S}_z^{(i)}$ ($i = 1, 2$) sind durch folgende Gleichungen charakterisiert:

$$(\vec{S}^{(i)})^2 \left| \frac{1}{2}, m^{(i)} \right\rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 \left| \frac{1}{2}, m^{(i)} \right\rangle, \quad \vec{S}_z^{(i)} \left| \frac{1}{2}, m^{(i)} \right\rangle = \hbar m^{(i)} \left| \frac{1}{2}, m^{(i)} \right\rangle, \quad (3)$$

mit $m^{(i)} = \pm \frac{1}{2}$. Man definiert Produktzustände

$$|m^{(1)}, m^{(2)}\rangle := \left| \frac{1}{2}, m^{(1)} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, m^{(2)} \right\rangle \equiv \left| \frac{1}{2}, m^{(1)} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, m^{(2)} \right\rangle \quad (4)$$

und den Permutationsoperator

$$P |m^{(1)}, m^{(2)}\rangle = |m^{(2)}, m^{(1)}\rangle. \quad (5)$$

Mit $\vec{S} := \vec{S}^{(1)} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \vec{S}^{(2)} \equiv \vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)}$ sei der Gesamtspin bezeichnet.

(Anmerkung: Dieser Zustandsraum wird z.B. für die Beschreibung von Hüllenelektronen des Heliumatoms benötigt.)

- (a) Geben Sie die gemeinsamen Eigenzustände zu den Operatoren $(\vec{S}^{(1)})^2$, $(\vec{S}^{(2)})^2$, \vec{S}^2 und \vec{S}_z ausgedrückt durch die Produktbasis (4) an.
- (b) Zeigen Sie, dass die Zustände aus (a) Eigenzustände von P sind. Welches sind die zugehörigen Eigenwerte?

(c) Zeigen Sie

$$P\vec{S}^{(1)}P = \vec{S}^{(2)}, \quad \text{bzw.} \quad P\vec{S}^{(2)}P = \vec{S}^{(1)}. \quad (6)$$

(d) Beweisen Sie, dass P mit Hilfe von $\vec{S}^{(i)}$ in der Form

$$P = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4}{\hbar^2} \vec{S}^{(1)} \cdot \vec{S}^{(2)} \right) \quad (7)$$

dargestellt werden kann.