Theoretische Physik 6
Höhere Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie
T. Hurth

1. Übungsblatt (Teil 1)

Ausgabe: 23. 10. 2012 Abgabe: Dienstag, 30. 10. 2012 Besprechung: 1./2. 11. 2012

Aufgabe 1: $(1 + 2 + 4 + 3 + 3)$
Sei S_N die Gruppe der Permutationen von N Objekten und $P \in S_N$. Der *Symmetrisierungs*operator S und der *Antisymmetrisierungs*operator A seien wie folgt definiert:

$$S = N_S \sum_{P \in S_N} P, \quad A = N_A \sum_{P \in S_N} \sigma(P) P, \tag{1}$$

wobei $\sigma(P) = +1$ für gerade und $\sigma(P) = -1$ für ungerade Permutationen P gilt und N_S, N_A geeignete Normierungsfaktoren sind.

(a) Wie viele Elemente enthält die Gruppe S_N?

(b) Zeigen Sie, dass $\sigma(P)$ eine eindeutige Zuordnung ist, d.h. nicht von der Darstellung von P durch Transpositionen abhängt.
Hinweis: Stellen Sie die Permutationen als Matrizen dar. Was ist dann $\sigma(P)$?

(c) Zeigen Sie, dass S und A Projektionsoperatoren sind, d.h. mit geeigneten Normierungsfaktoren N_S, N_A gilt $S^2 = S$, $A^2 = A$, $AS = SA = 0$. Bestimmen Sie diese Normierungsfaktoren. Gilt dann auch $S + A = \mathbb{1}$?

(d) Bestimmen Sie den Normierungsfaktor C_S für symmetrische N-Teilchenwellenfunktionen

$$\varphi^{(s)}_{c_1 \ldots c_N}(x_1, \ldots, x_N) = C_S \sum_{P \in S_N} \varphi_{P(c_1)}(x_1) \ldots \varphi_{P(c_N)}(x_N), \tag{2}$$

wobei die c_i die einzelnen Zustände (z.B. Energie- oder Spinzustände) charakterisieren und die 1-Teilchenwellenfunktionen $\varphi_{c_i}(x_i)$ folgende Orthonormalitätsrelation erfüllen:

$$\int dx \, \varphi^*_b(x) \varphi_c(x) = \delta_{bc} \, . \tag{3}$$

(e) Die Dimension des 1-Teilchen-Hilbertraums $\mathscr{H}_{(1)}$ sei $2s + 1$ (das ist z.B. der Fall für lokalisierte Teilchen mit Spin s), d.h. das Teilchen kann $2s+1$ verschiedene Spinzustände annehmen. Berechnen Sie die Dimension folgender Räume:

(1) des Hilbertraums der Produktzustände $\mathscr{H}_{(N)} = \mathscr{H}_{(1)} \otimes \cdots \otimes \mathscr{H}_{(1)}$ für N Teilchen;

(2) des Hilbertraums für symmetrische Zustände (Bosonen) $S\mathscr{H}_{(N)}$;

(3) des Hilbertraums für antisymmetrische Zustände (Fermionen) $A\mathscr{H}_{(N)}$.